

رابطه فیثاغورس

به نام خدا

وارد فصل ششم کتاب یعنی فصل "مثلث" شدیم.

قسمت اول درس به رابطه‌ی فیثاغورس اختصاص داده. این رابطه بر خلاف اسمش خیلی ساده‌س 😊.

این رابطه در تمام مثلثهای قائم‌الزاویه برقراره. حالا چی به ما میگه؟

رابطه فیثاغورس به ما میگه که در مثلثهای قائم‌الزاویه همیشه رابطه زیر برقراره:

$$وتر^2 = ضلع\ دیگر^2 + ضلع\ یک^2$$

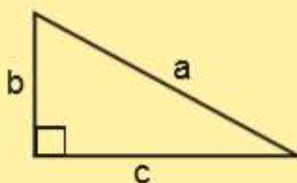
خب این به چه دردمون میفوره؟

اگه در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازه دو ضلع از مثلث رو داشته باشیم، می‌تونیم از

رابطه بالا اندازه ضلع سوم رو هم به دست بیاریم.

بیان ریاضی رابطه فیثاغورس به صورت زیر هست:

رابطه میان مجذور (مربع) اندازه ضلع های مثلث قائم الزاویه به **رابطه فیثاغورس** معروف است.



این رابطه بیان می کند که در هر مثلث قائم الزاویه، مجذور وتر با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر است.

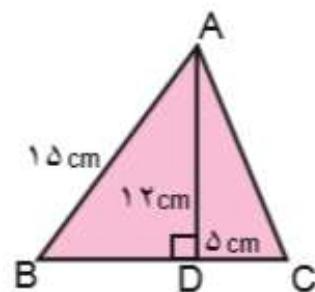
$$a^2 = b^2 + c^2$$

عکس این رابطه هم درست است یعنی، اگر در مثلثی مجذور یک ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر آن برابر شد، آن مثلث قائم الزاویه است.

توجه توجه توجه : این رابطه فقط برای مثلثهای قائم الزاویه برقراره

چند تا تمرین حل می کنیم تا استفاده کردن از این رابطه رو یاد بگیریم.

۱- محیط مثلث ABC را حساب کنید.

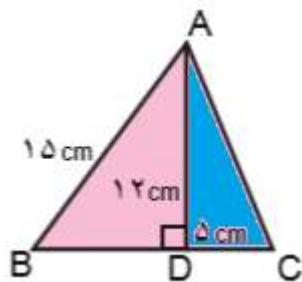


برای محاسبه محیط مثلث ABC باید چکار کنیم؟ باید هر سه ضلع این مثلث رو با هم جمع کنیم، یعنی :

$$\text{محیط مثلث ABC} = AB + AC + BC$$

اندازه AB رو داریم. اندازه دو ضلع دیگر رو باید پیدا کنیم.

مثلث ABD و مثلث ADC هر دو قائم الزاویه هستند. پس در این دو مثلث می‌تونیم از رابطه فیثاغورس استفاده کنیم.
 مثلث آبی رنگ رو در نظر بگیرید:



این مثلث یه مثلث قائم الزاویه است و دو ضلعش رو داریم. بنابراین با استفاده از رابطه فیثاغورس می‌تونیم اندازه ضلع سوم رو به دست بیاریم.
 رابطه فیثاغورس رو می‌نویسیم:

$$\text{وتر}^2 = \text{ضلع دیگر}^2 + \text{ضلع یک}^2$$

یعنی:

$$(AC)^2 = (AD)^2 + (DC)^2$$

اندازه‌هایی که داریم رو جاگذاری می‌کنیم:

$$(AC)^2 = (12)^2 + (5)^2$$

$$(AC)^2 = 169$$

بنابراین $AC = 13$

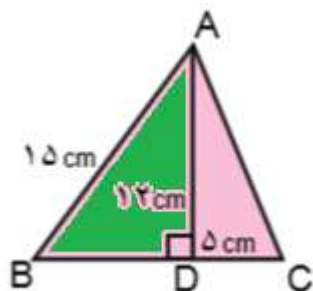
حالا باید BC رو به دست بیاریم.

BC خودش از دو قسمت تشکیل شده:

$$BC = BD + DC$$

DC رو که داریم و برابر ۵ هست، باید BD رو به دست بیاریم؛

مثلث سبز رو در نظر بگیرید؛



یه مثل قائم الزاویه‌س که دو تا ضلعش رو داریم. بنابراین طبق رابطه فیثاغورس می‌تونیم ضلع سوم رو هم به دست بیاریم؛

$$\text{وتر}^2 = \text{ضلع دیگر}^2 + \text{یک ضلع}^2$$

یعنی؛

$$(AB)^2 = (AD)^2 + (BD)^2$$

$$(15)^2 = (12)^2 + (BD)^2$$

$$225 = 144 + (BD)^2$$

$$225 - 144 = (BD)^2$$

$$81 = (BD)^2$$

$$BD = 9 \quad \text{بنابراین ؛}$$

با به دست آوردن BD اندازه BC هم به صورت زیر به دست میاد؛

$$BC = BD + DC$$

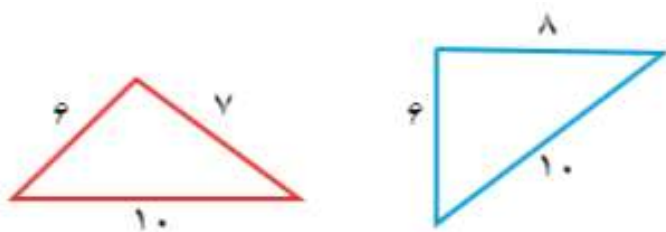
$$BC = 9 + 5 = 14$$

اندازه همه ضلعهایی که برای به دست آوردن محیط لازم بود به دست اومد. بنابراین داریم:

$$ABC \text{ محیط مثلث} = AB + AC + BC$$

$$ABC \text{ محیط مثلث} = 15 + 13 + 14 = 42$$

۲- کدام مثلث قائم الزاویه است؟



مثلثی قائم الزاویه است که اندازه اضلاعش در رابطه فیثاغورس صدق کنه. بنابراین این رابطه رو برای هر دو مثلث می نویسیم:

مثلث آبی:

$$\text{وتر}^2 = \text{ضلع دیگر}^2 + \text{ضلع یک}^2$$

$$10^2 = 8^2 + 6^2$$

$$100 = 64 + 36$$

$$100 = 100$$

تساوی برقراره ، پس این مثلث قائم الزاویه س.

مثلث قرمز:

$$2^{\text{ضلع دیگر}} + 2^{\text{یک ضلع}} = 2^{\text{وتر}}$$

$$10^2 = 7^2 + 6^2$$

$$100 = 49 + 36$$

$$100 \neq 85$$

تساوی برقرار نیست پس این مثلث قائم الزاویه نیست.

پس ما یاد گرفتیم که در دو حالت از رابطه فیثاغورس استفاده کنیم:

۱. وقتی اندازه دو ضلع از مثلث قائم الزاویه رو داشته باشیم و بفوایم اندازه ضلع سوم رو به دست بیاریم.

۲. وقتی بفوایم ببینیم آیا مثلثی که بهمون داده شده قائم الزاویه هست یا خیر.

شکل‌های هم‌نهشت

در این قسمت می‌فوایم درباره شکل‌های هم‌نهشت با هم صرف بزنییم ولی قبل از اون نیازه که اول تبدیلات هندسی رو به مرور بکنیم:

۱. **انتقال:** آگه شکل روی یه صفحه از جایی که قرار داره به محل دیگه ای بره ولی اندازه و جهتش تغییر نکنه، اونوقت میگیم تصویر جردید، **انتقال یافته** شکل هست.

۲. **تقارن مهوری:** آگه قرینه یه شکل رو نسبت به یه خط پیدا می‌کنیم، تصویری که به دست میاد با شکل اول برابره ولی جهتش ممکنه فرق کنه. توجه کنید که در این تبدیل هم اندازه شکل تغییر نمیکنه

۳. **دوران:** آگه یه شکل رو حول یه نقطه بپرفونیم، میگیم دوران انجام شده. دوران میتونه با زاویه های مختلف باشه، مثلا دوران حول نقطه O با زاویه ۱۸۰ درجه

آگه دقت کنید میبینید که در سه تا تبدیلی که معرفی کردیم اندازه شکل تغییر نکرد، فقط منتقل شد یا قرینه شد یا پرفید 😊 ولی شکل اولیه تغییر نکرد. با این توضیحات شکل‌های همنهشت رو معرفی می‌کنیم؛

شکل‌های همنهشت:

چه موقع میگیم دو تا شکل همنهشت هستن؟

آگه بتونیم یه شکل رو، با یک با چند تا تبدیل هندسی، به شکل دیگه ای تبدیل کنیم میگیم این دو تا شکل با هم همنهشت هستن.

توجه کنید که توی هم‌نهشتی، دو تا شکل دقیقاً شبیه به هم هستن فقط جهت اونها ممکنه با هم فرق کنه

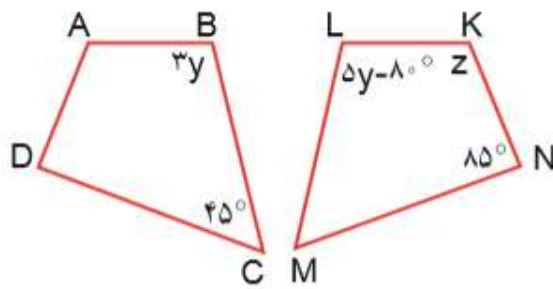
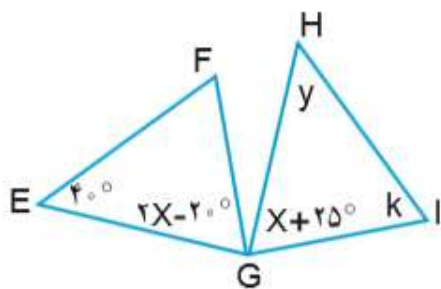
در شکلهای هم‌نهشت، **اجزای متناظر دو شکل دقیقاً با هم برابرند**، یعنی زوایای متناظر با هم و اضلاع متناظر هم با هم برابرند.

مثال:

۳- زاویه‌های مجهول را بیابید.

الف) مثلث HIG حاصل دوران 90° درجه EFG حول نقطه G است.

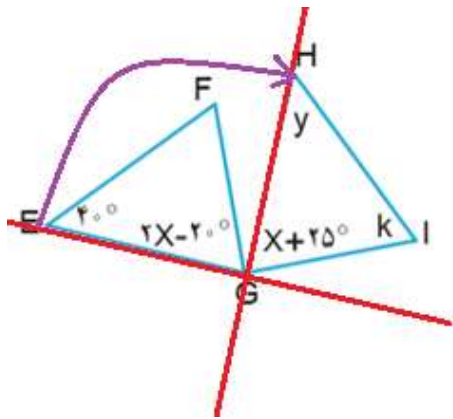
ب) چهارضلعی KLMN حاصل تقارن چهارضلعی ABCD نسبت به خطی عمودی است.



با توجه به اینکه مثلث HIG حاصل دوران EFG به اندازه 90° درجه حول نقطه G هست بنابراین، دو مثلث با هم هم‌نهشت هستند و ضلع‌ها و زاویه‌های متناظرشون با هم برابره.

در اینجا باید تشخیص بدیم که کدوم زاویه‌ها با هم متناظرن.

ضلع GE رو به اندازه 90° درجه می‌چرخونیم تا بینیم روی کدوم ضلع منطبق میشه؟



همینطور که می بینیم ضلع GE روی GH میفته (منطبق میشه) ، پس:

زاویه E با زاویه H متناظره

زاویه F با زاویه I متناظره

بنابراین:

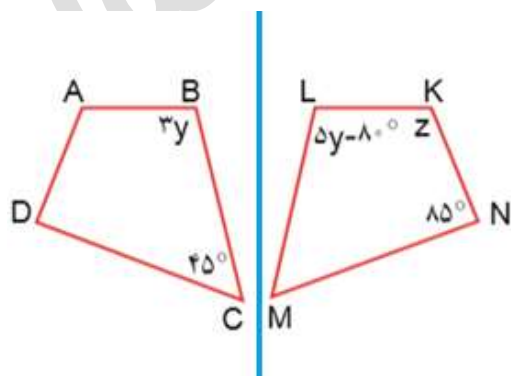
$$Y = 40^\circ$$

$$2X - 20 = X + 25$$

$$2X - X = 25 + 20$$

$$X = 45^\circ$$

پهلو ضلعی KLMN حاصل تقارن پهلو ضلعی ABCD نسبت به خط عمودیه، یعنی:



با توجه به شکل:

زاویه C با زاویه M متناظره

زاویه D با زاویه N متناظره

زاویه A با زاویه K متناظره

زاویه B با زاویه L متناظره

بنابراین تساویهای زیر رو داریم:

$$5Y - 80 = 3Y$$

$$5Y - 3Y = 80$$

$$2Y = 80 \rightarrow Y = 40^\circ$$

تا اینجا در چهارضلعی ABCD زاویه های زیر رو داریم:

$$B = 3Y = 120^\circ$$

$$D = N = 85^\circ$$

$$C = 45^\circ$$

اندازه زاویه A هم مجهول هست، اما ما می‌دونیم مجموع زاویه های داخلی یک چهارضلعی برابر 360° درجه هست بنابراین:

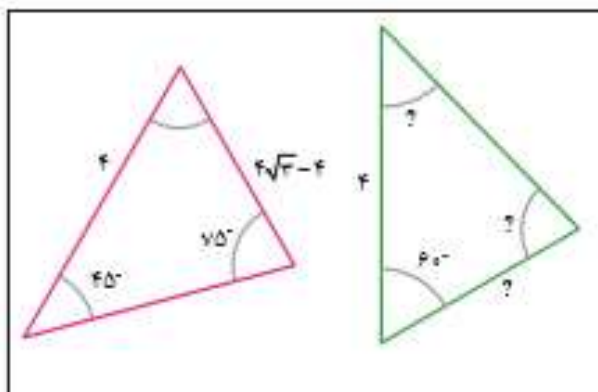
$$A = 360 - (120 + 85 + 45) = 110$$

زاویه A رو به دست آوردیم. با توجه به همنهشت بودن دو شکل :

$$Z = 110^\circ$$

مثال بعد :

۱- در شکل‌های زیر، دو مثلث داخل هر کادر با یکدیگر هم‌نهشت‌اند. اندازه‌ی باره‌خط‌ها و زاویه‌های مجهول را روی شکل مشخص کنید :



صورت سوال به ما گفته که دو مثلث هم‌نهشت هستند، بنابراین زاویه‌ها و ضلع‌های متناظرشون با هم برابره.

اینجا توی مثلث سبز، یه زاویه ۶۰ درجه داریم ولی دو تا زاویه ای که توی مثلث قرمز مشخص شده هیچکدومش ۶۰ درجه نیست، پس اون زاویه ای که مجهوله باید اندازه‌ش ۶۰ درجه باشه.

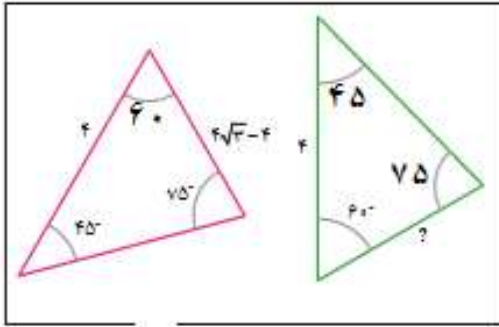
الان سه تا زاویه مثلث قرمز مشخص شد. زاویه‌های مجهول مثلث سبز چند درجه هستن؟

به مثلث قرمز نگاه می‌کنیم، یه زاویه ۶۰ درجه داره، یه زاویه ۴۵ درجه و یه زاویه ۷۵ درجه.

پس مثلث سبز هم باید این زاویه‌ها رو داشته باشه. پس اون دو تا زاویه ای که توی مثلث سبز مجهول هستن یکیشون ۴۵ درجه‌س، یکیشون ۷۵ درجه.

حالا باید تعیین کنیم کدوم ۴۵ درجه‌س و کدوم ۷۵ درجه.

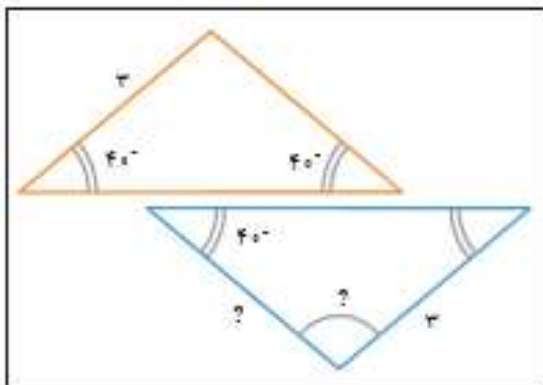
به مثلث قرمز نگاه می‌کنیم، ضلع روبروی زاویه ۷۵ درجه، اندازه ش ۴ هست. پس توی مثلث سبز هم باید ضلع ۴ و زاویه ۷۵ روبروی هم باشن. تا اینجا مشخص شد که زاویه ۷۵ درجه کدومه. پس اون یکی زاویه هم میشه ۴۵ درجه. تا اینجا داریم:



مجهول بعدی ما چیه؟ ضلع بین زاویه ۶۰ درجه و ۷۵ درجه توی مثلث سبز. از کجا باید بفهمیم چنده؟

باید ضلع بین زاویه ۶۰ درجه و ۷۵ درجه رو توی مثلث قرمز نگاه کنیم. چنده؟

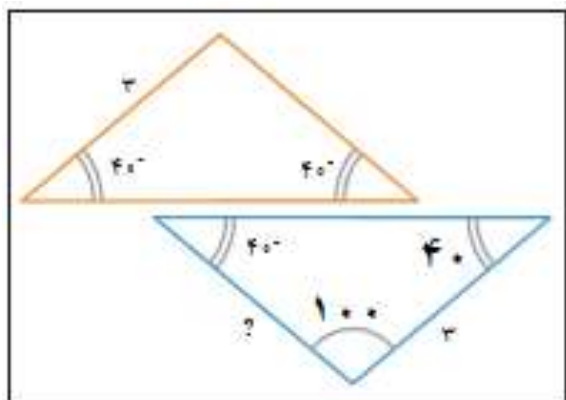
$4\sqrt{3} - 4$. پس ضلع مجهول هم $4\sqrt{3} - 4$ هست.



در مثلث نارنجی دو تا زاویه ۴۰ درجه داریم. پس توی مثلث آبی هم باید دو تا زاویه ۴۰ درجه داشته باشیم. از طرفی می‌دونیم که مجموع زاویه های داخلی یک مثلث ۱۸۰ درجه است. پس اندازه زاویه مجهول در مثلث آبی برابر است با:

$$\text{اندازه زاویه مجهول} = 180 - (40 + 40) = 180 - 80 = 100$$

پس تا اینجا داریم:



الان فقط اندازه یکی از ضلع ها مجهوله. آگه دقت کنید می بینید که مثلث ما یک مثلث متساوی الساقینه. چرا؟

چون آگه دو تا زاویه در یک مثلث با هم برابر باشن، ضلعهای روبرو به اون دو زاویه هم با هم برابرن و بنابراین مثلث متساوی الساقین میشه.

در اینجا هم دو تا زاویه برابر داریم پس مثلث متساوی الساقین هست و بنابراین اندازه ضلع مجهول هم برابر ۳ میشه.

همنوشتی مثلثها

از بین شکلهای همنوشت، مثلثهای همنوشت برای ما اهمیت بیشتری دارن.

در ادامه میفوییم شرایط همنوشتی دو مثلث رو بررسی کنیم.

همنهشتی مثلثها رو در دو قسمت بررسی می‌کنیم:

۱. همنهشتی مثلثها در حالت کلی

۲. همنهشتی مثلثهای قائم‌الزاویه

همنهشتی مثلثها در حالت کلی:

دو مثلث تحت شرایط زیر با هم همنهشت هستند:

۱. دو زاویه و ضلع بین

اگر دو تا زاویه از یک مثلث با دو تا زاویه از یک مثلث دیگر برابر باشند، و ضلعی هم که بین این دو تا زاویه قرار داره توی هر دو مثلث برابر باشه اونوقت دو مثلث همنهشتن. این حالت رو بطور فاصله با **ض ض** نشون میدیم.

۲. دو ضلع و زاویه بین

اگر دو تا ضلع از یک مثلث، با دو تا ضلع از یک مثلث دیگر برابر بود و زاویه ای هم که بین این دو تا ضلع قرار میگیره توی هر دو تا مثلث برابر بود، اونوقت می‌گیم این دو مثلث همنهشتن و این حالت رو با **ض ض** نشون میدیم.

۳. سه ضلع

اگر سه ضلع یک مثلث با سه ضلع یک مثلث دیگر برابر باشن اون دو تا مثلث همنهشتن. ما این حالت رو با **ض ض ض** نشون میدیم.

همنهشتی در مثلث های قائم الزاویه:

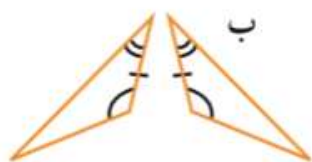
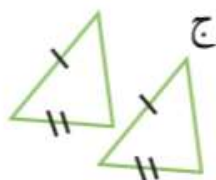
آگه مثلثای ما قائم الزاویه باشن، علاوه بر حالت های فوق، ۲ حالت دیگه هم برای همنهشتی شون وجود داره:

۱. آگه وتر دو تا مثلث و یکی از اضلاع دو مثلث با هم برابر باشن، میگی دو تا مثلث با هم همنهشتن. این حالت رو با **و فن** نشون میدیم.

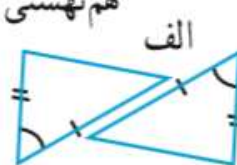
۲. آگه وتر دو تا مثلث و یکی از زاویه های تند دو مثلث با هم برابر باشن، میگی دو تا مثلث با هم همنهشتن. این حالت رو با **و ز** نشون میدیم.

حالا با چند تا مثال این حالتها رو بررسی می کنیم:

۱- در هر قسمت، بعضی از ضلع ها و زاویه های مساوی مشخص شده اند. مواردی را که اطلاعات داده شده برای تشخیص همنهشتی دو مثلث کافی است، پیدا کنید و حالت



هم نهشتی را بنویسید.



الف:

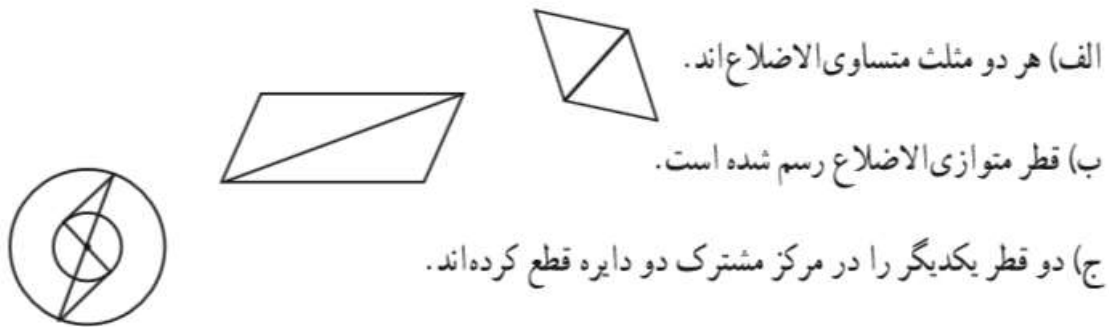
با توجه به اطلاعات روی شکل، دو مثلث بنا به حالت "دو ضلع و زاویه بین" با هم همنهشتن.

ب:

با توجه به اطلاعات روی شکل، دو مثلث بنا به حالت "دو زاویه و ضلع بین" با هم همنهشتن.

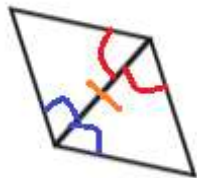
ج: در اینجا فقط تساوی دو ضلع رو داریم که برای اثبات هم‌نهشتی کافی نیست.

۲- در هر شکل، مساوی بودن برخی از اجزای دو مثلث را می‌توان از روابط میان پاره‌خط‌ها، زاویه‌ها، تعریف دایره یا چهارضلعی‌های خاص نتیجه گرفت. اجزای مساوی را پیدا، و با علامت‌گذاری مناسب مشخص کنید؛ سپس، حالت هم‌نهشتی دو مثلث را بنویسید.



الف:

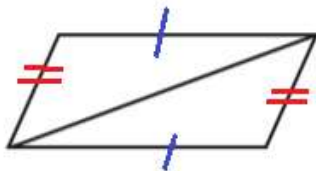
هر دو مثلث متساوی‌الاضلاع هستند، بنابراین با توجه به شکل زیر، دو مثلث بنا به حالت دو زاویه و ضلع بین، هم‌نهشت هستند.



توجه: علت مساوی بودن زاویه‌ها اینه که در مثلثهای متساوی‌الاضلاع، اندازه همه زاویه‌ها برابر ۶۰ درجه‌س.

ب:

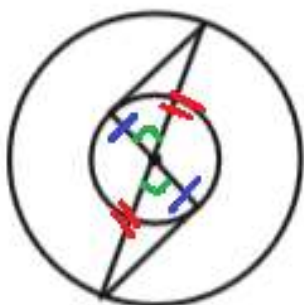
با توجه به شکل زیر، دو مثلث بنا به حالت دو ضلع و زاویه بین، با هم هم‌نهشتن.



توجه:

اضلاع متقابل با هم برابرند چون شکل داده شده متوازی الاضلاع
 زاویه بین این دو ضلع برابرند چون در متوازی الاضلاع، زاویه‌های روبرو با هم برابرند.
 این دو مثلث بنا به حالت‌های دیگر هم می‌توانند هم‌نویس باشند.

ج: با توجه به تساوی‌هایی که روی شکل نمایش داده شده، دو مثلث بنا به حالت دو ضلع
 و زاویه بین با هم برابرند:

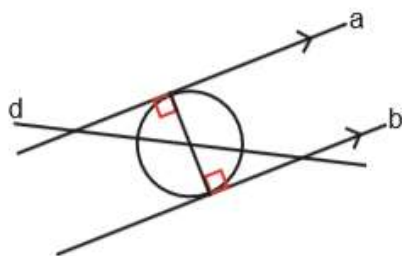


توجه:

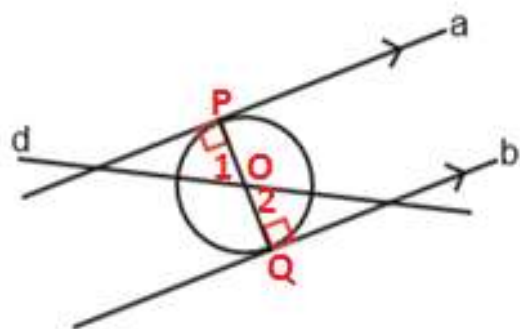
دو ضلع کوچک با هم برابرند چون شعاع‌های دایره کوچک هستند.
 دو ضلع بزرگ با هم برابرند چون شعاع‌های دایره بزرگ هستند.
 دو زاویه با هم برابرند چون متقابل به راس هستند.

۲- در هر شکل از روابط میان پاره خطها، زاویهها، تعریف دایره یا چهارضلعی های خاص می توانیم نتیجه بگیریم که برخی از اجزای دو مثلث با هم مساوی اند. اجزای مساوی را پیدا، و با علامت گذاری مناسب مشخص کنید؛ سپس، حالت هم نهشتی دو مثلث را بنویسید.

الف) خط d از مرکز دایره می گذرد و دو خط a و b بر قطر دایره عمودند.



نامگذاری می کنیم:



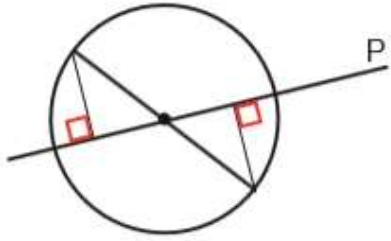
زاویه های $O1$ و $O2$ با هم برابرند چون متقابل به راس هستند.

قطر OP با OQ برابر است چون هر دو شعاع دایره هستند و با هم برابرند.

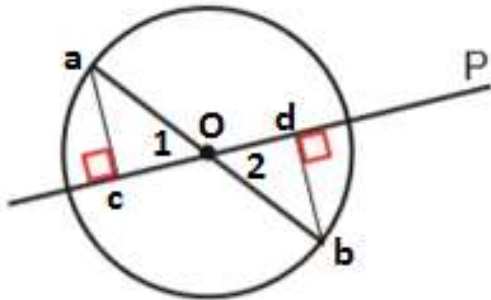
زاویه های P و Q با هم برابرند، چون هر دو 90° درجه هستند.

بنابراین دو مثلث بنا به حالت "دو زاویه و ضلع بین" با هم هم نهشت هستند.

(ب) خط p از مرکز دایره گذشته است.



نامگذاری می‌کنیم:

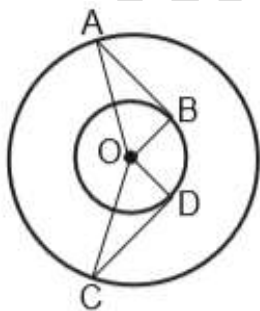


مثلثهای oac و obd هر دو قائم الزویه هستند.

Ob و Oa وترهای این دو مثلث هستند که با هم برابرند (چون هر دو شعاع دایره هستند)

زاویه های $o1$ و $o2$ هم با هم برابرند چون متقابل به راستند.

بنابراین دو مثلث بنا به حالت "وتر و یک زاویه" با هم همنهشت هستند.



(ج) نقطه O مرکز مشترک دو دایره و پاره خطهای AB و CD

به ترتیب بر OB و OD عمودند.

دو مثلث قائم الزاویه داریم. طبق اطلاعات مساله OA و OB وترهای این دو مثلث هستند. این دو وتر با هم برابرند چون شعاعهای دایره بزرگ هستند و شعاع های دایره با هم برابرند.

ضلع های OB و OD هم با هم برابرند چون هر دو شعاع دایره کوچک هستند. بنابراین دو مثلث بنا به حالت وتر و یک ضلع با هم همنهشت هستند.

ادامه تمرینها رو می تونید در "کانال فصولی حل تمرین و نمونه سوال" ببینید ☺
در صورت تمایل به عضویت، به ادمین کانال مراجعه کنید.

آموزش گام به گام ریاضی چهارم تا دهم در سایت:

www.riazibaham.ir

و کانال های @RiaziBaHam و @RiaziBaHam8

برای دریافت جزوات سایر پایه ها ، تمرینهای حل شده و نمونه سوالات امتحانی حل شده، به "ریاضی با هم" پیوندید.